TECHNIQUES & MÉTHODES S05

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

FONCTIONS USUELLES

■■■ Trigonométrie ❤

Résoudre une équation trigonométrique

Pour résoudre une équation trigonométrique simple, j'utilise les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \cos x = \cos a & \iff & x \equiv a[2\pi] \text{ ou } x \equiv -a[2\pi] \\ \sin x = \sin a & \iff & x \equiv a[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - a[2\pi]. \\ \tan x = \tan a & \iff & x \equiv a[\pi] \end{array}$$

Pour résoudre une équation trigonométrique de la forme $a\cos x + b\sin x = c$, avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$, je normalise cette équation pour me ramener à une équation simple : il existe $\varphi \in \mathbf{R}$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Par conséquent,
$$a\cos x + b\sin x = c \iff \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice 14 : Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique de l'équation $\cos x + \sin x = 1$. *Réponse :* $x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] ou x \equiv 0[2\pi]$

Calculer une somme trigonométrique

Pour calculer une somme de fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques, je passe en exponentielles (réelle ou imaginaire pure suivant les cas), j'applique la formule du binôme ou l'identité géométrique puis je reviens en notation trigonométrique en prenant suivant les cas partie réelle imaginaire, partie paire ou impaire.

Exercice 15 : Soit $(a,x) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. Simplifiez $S(a,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kx)$. *Réponse :* après calculs $E(a,x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kx)} = \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\, e^{i(a+\frac{n-1}{2}x)}$. Finalement, comme $S(a,x) = \mathfrak{Re}\, E(a,x)$, j'obtiens $S(a,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kx) = \frac{\sin(nx/2)\ \cos((a+\frac{n-1}{2}x)}{\sin(x/2)}$

■■■ Manipuler les fonctions usuelles ❤

Comment simplifier une expression ou démontrer une égalité

Il existe deux méthodes différentes

- utiliser un changement de variable
- dériver puis intégrer

Exercice 16 : Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$ $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$

Calculer avec les fonctions trigonométriques réciproques

Pour calculer avec les fonctions trigonométriques réciproques, je me rappelle que $\operatorname{Arcsin}(x)$, $\operatorname{Arccos}(x)$ et $\operatorname{Arctan}(x)$ sont des **antécédents particuliers** de x par les fonctions sin, cos, ou tan. Pour les caractériser de façon unique parmi tous les antécédents de x, il faut aussi les **localiser** :

Pour montrer que $t = \operatorname{Arcsin}(x)$	Pour montrer que $t = \operatorname{Arccos}(x)$	Pour montrer que $t = \operatorname{Arctan}(x)$
$\boxed{1}$ je vérifie que $\sin(t) = x$	$\boxed{1}$ je vérifie que $\cos(t) = x$	$\boxed{1}$ je vérifie que $\tan t = x$
$\boxed{2}$ je localise $t \in [-\pi/2, \pi/2]$	$\boxed{2}$ je localise $t \in [0,\pi]$	$\boxed{2}$ je localise $t \in]-\pi/2, \pi/2[$

Exercice 17 : Calculer $\operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arctan}(1/5) + \operatorname{Arctan}(1/8)$ *Réponse :* $\pi/4$

Comment résoudre une équation

Il existe deux méthodes différentes

- étudier la fonction f et montrer que l'équation admet une solution unique, puis la calculer.
- raisonner par analyse-synthèse. Supposant que x est solution, il s'agit en utilisant les propriétés premières des fonctions usuelles de se ramener à une équation polynomiale en x.

Exercice 18 : Résoudre $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \dfrac{7\pi}{12}$. *Réponse :* $x = 1$.